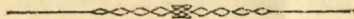
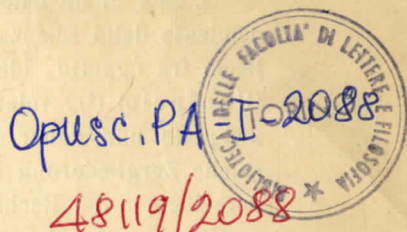
FONDAMENTI

DEL

CALCOLO LOGICO

MEMORIA

DEL

Dott. ALBINO NAGY

NAPOLI
BENEDETTO PELLERANO EDITORE
Libreria Scientifica e Industriale
Via Gennaro Serra 20, e Largo Nilo 6.
1890

FONDAMENTI DEL CALCOLO LOGICO

Pubblico sotto questo titolo i risultati di alcune mie ricerche risguardanti l'applicazione della matematica alla logica, ora specialmente che il chiar. professore Peano ha iniziati tali studii in Italia ([1]); osservando che alcuni dei risultati ottenuti li aveva svolti affatto da solo, dilettandomi di questi studii ancor nel mio VII anno di ginnasio, a Zara ([2]). Venuto poscia a conoscenza della letteratura su questo argomento all'Università di Vienna, mi servii degli stessi per la mia dissertazione « *Ueber Anwendungen der Mathematik auf die Logik* », che presentai all'Università, quale tesi laureale, e dalla quale ricavo in gran parte il presente saggio.

I.

Sviluppo storico e stato presente del calcolo logico.

Fu notata da lungo tempo una certa connessione fra la logica e la matematica e, benchè i tentativi di un'applicazione scientifica della matematica alle scienze filosofiche ([3]) sieno di data relativamente recente, pure troviamo i germi di una pertrattazione matematica della logica di già nella quistione di una lingua universale, che fu per molto tempo agitata dai filosofi ([4]). Su di ciò vedi: Adolf

Trendelenburg, *Historische Beiträge zur Philosophie*. Berlin, Bethge, 1867. v. III, p. 1-63.

L'idea di un calcolo logico, « *calculus ratiocinator* », come un ramo indipendente della scienza fu però data da Leibniz (5), che basandosi sul parallelismo fra oggetto, idea e segno, che figura di già nell'antica filosofia dei Cinesi (Confucio) (6), voleva istituire un tal simbolismo dei concetti, che fosse « eine adäquate und daher allgemeine Bezeichnung des Wesens, und zwar durch eine solche Zergliederung in die Elemente der Begriffe, dass dadurch eine Behandlung derselben durch Rechnung möglich werden sollte » (Trendelenburg op. cit. p. 6).

Questa idea fu realizzata, verso la metà del nostro secolo, dal matematico inglese George Boole (7), le cui dottrine furono continuate da Jevons, Ellis, Peirce, Mac Coll, Mac Farlane, Halsted ed altri (8).

Indipendentemente da questo movimento, che si sviluppò in America ed in Inghilterra, Robert Grassmann s'occupò del medesimo soggetto e trovò alcune proporzioni interessanti, parte nuove, parte coincidenti con quelle di Boole (9).

Ernst Schröder (10) - col suo opuscolo « *Der Operationskreis des Logikcalculs* ». Leipzig, Teubner. V+37 p. - nel 1877 e Giuseppe Peano nel 1888 resero note in Germania ed in Italia le teorie di Boole, esposte in forma affatto elementare e chiara (11).

Oggetto della logica deduttiva sono le forme pure del pensare, cioè i concetti, i giudizii ed i raziocinii; e, precisamente, considerati in sè e nelle loro relazioni, cioè dei concetti nei giudizii, e dei giudizii nei raziocinii. Si convenne pertanto di denotare con lettere i concetti considerati estensivamente, cioè secondo la loro sfera. P. e. se con a simbolizziamo il concetto « verde », si intende con questa lettera quel campo del pensabile, nel quale sono contenute tutte le cose che sono verdi. a si può chiamare un pezzo della *varietà logica* (*logische Mannigfaltigkeit*, formata da tutto il pensabile) oppure una somma di *elementi* (*enti*, *individui*, che, nel nostro caso, sono verdi). Si chiama anche *classe* (*nome generico*), perchè viene pensata con essa una classe o specie di oggetti, la quale classe può, naturalmente, in certi casi restringersi ad un solo individuo (*nome proprio*).

Se a e b sono simboli di tali classi, allora si ottiene con la moltiplicazione (nella logica *determinazione*) o con l'addizione (*collezione*) degli stessi, di nuovo un simbolo di una classe, ed ab denota il campo comune ai due campi a e b, $a+b$ il campo nel quale a e b si completano scambievolmente (12).

Queste operazioni (come eluce dall'esperienza o può venir preso assiomaticamente) hanno le proprietà commutativa ed associativa:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad , \quad a + b = b + a ,$$

$$a \cdot (bc) = (ab) \cdot c \quad , \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

ed ancora una doppia proprietà distributiva (Peirce) (13):

$$a(b + c) = ab + ac \quad . \quad a + bc = (a + b)(a + c).$$

Il simbolo **1** rappresenta l'intero campo del pensabile (varietà logica), **O** una classe vuota alla quale non appartiene verun ente, il nulla ([14]).

Due simboli sono fra loro eguali, quando le classi rappresentate sono identiche, cioè quando esse sono uno stesso pezzo della varietà logica, ossia quando abbracciano gli stessi enti.

Da questa definizione si ha:

$$aa = a \quad , \quad a + a = a ,$$

che sono due equazioni caratteristiche del calcolo logico (Boole).

Aggiungendo l'assioma che eguale sommato o moltiplicato con eguale, dà eguale, le due operazioni tetiche sono sempre eseguibili ed univoche.

Dalle seguenti identità

$$a \cdot \mathbf{1} = a \quad , \quad a + \mathbf{0} = a \quad , \quad a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad , \quad a + \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

delle quali presa una come assioma si possono dimostrare le altre (vedi Schröder op. cit. p. 17), si ricava che per ogni a dato havvi *un* a_1 tale, che sussistano simultaneamente

$$a + a_1 = \mathbf{1} \quad , \quad aa_1 = \mathbf{0} \qquad (\textit{principium contradictionis}).$$

a_1 si dice la negazione di a.

$$(a_1)_1 = a \quad , \quad (ab)_1 = a_1 + b_1 \quad , \quad (a + b)_1 = a_1 b_1$$

e specialmente $(\mathbf{1})_1 = \mathbf{0}$, $(\mathbf{0})_1 = \mathbf{1}$ } (Grassmann).

Da tutte queste proposizioni eluce il principio di dualità (Schröder), che suona:

« Da ogni formula valevole nella logica si può dedurre un'altra, scambiando fra loro i segni dell'addizione e della moltiplicazione, ed i simboli **O** ed **1** ([15]) ».

Il teorema

$$\mathbf{1} - a = \mathbf{0} : a$$

corrisponde dualmente a sè stesso ed unisce la negazione ($a_1 = 1 - a$) con le operazioni — in certo modo ristrette — della sottrazione (*esclusione*) e della divisioue (*astrazione*).

Queste operazioni litiche non sono, in massima, sempre eseguibili nè univoche come si vede da queste equazioni:

$$a = a + ab \qquad (\text{« \textit{Absorptions gesetz} » Schröder}).$$

$$a = a(a + b). \quad ([16])$$

Il fin qui detto risguarda i concetti: ora bisogna considerare il giudizio, che esprime appunto una relazione fra concetti.

Dati due concetti a e b, allora è

$$ab = \mathbf{0}$$

oppure

$$ab \neq \mathbf{0}.$$

Dal primo caso (« *relation of total exclusion* ») seguono immediatamente i giudizii:

« nessun a è b »

« nessun b è a »

« tutti gli a sono non b (b_1) »

« tutti i b sono non a (a_1) »;

dal secondo (« *relation of partial–it may be total inclusion* » Cayley. Quart. J. XI p. 282):

« alcuni a sono b »

« alcuni b sono a ».

Queste sono tutte le relazioni possibili. Prendendo a_1 invece di a, si hanno gli stessi giudizii di prima, nei quali comparisce invece di a, a_1 e viceversa – essendo $(a_1)_1 = a$ (Cayley).

Una relazione α fra i concetti a e b, può esistere sempre (*categorica*), cioe per tutto il pensabile, oppure per un certo numero di enti (*condizionale*). Con $x : \alpha$ intendesi la classe formata da tutti gli enti per cui è vera la proposizione α. (Peano).

Se questa classe è $= \mathbf{1}$, allora la proposizione vale per tutti i valori di x, è identica, se $= \mathbf{0}$, allora non vale per alcun x, è assurda. Nel giudizio poi c'interessa specialmente di sapere se la relazione $a \alpha b$ valga per tutti gli enti compresi da a oppure no.

Sia

$$ab \neq \mathbf{0},$$

allora il prodotto $a \alpha b$ esisterà e sarà eguale ad ab, quando

$$\alpha = \mathbf{1},$$

ciò che vorrà dire che la proposizione α è vera; e svanirà quando

$$\alpha = \mathbf{0},$$

ciò che vorrà dire che la proposizione (contraddicente l'ipotesi), è falsa. Possiamo quindi usare la notazione

$$\alpha = \mathbf{1}, \mathbf{0}$$

per esprimere il fatto che il giudizio α è vero, o falso (Mac Coll).

Allora

$$\alpha\beta = \mathbf{1}$$

significa che ambidue i giudizii α e β sono contemporaneamente veri;

Razdoe - immediato

$$\alpha\beta = \mathbf{0} \qquad (\textit{oppositio contraria})$$

che almeno uno è falso, cioè che tutt' e due non possono essere veri contemporaneamente;

$$\alpha + \beta = \mathbf{0}$$

invece esprime essere tutt' e due falsi,

$$\alpha + \beta = \mathbf{1} \qquad (\textit{oppositio subcontraria})$$

che almeno uno è vero, cioè che tutt' e due non possono essere falsi contemporaneamente.

Se valgono simultaneamente

$$\alpha + \alpha_1 = \mathbf{1} \quad , \quad \alpha\alpha_1 = \mathbf{0} \qquad (\textit{oppositio contradictoria})$$

allora α_1 è l'opposto contraddittorio, cioè la negazione di α.

Ad un dato α corrisponde *un* α_1, ed è

$$(\alpha_1)_1 = \alpha \quad \text{ecc.}$$

All'incontro molti β soddisfanno all'equazione

$$\alpha = \alpha\beta \qquad (\textit{subalternatio}),$$

in virtù della quale da $\alpha = \mathbf{1}$ segue $\beta = \mathbf{1}$ e da $\beta = \mathbf{0}$, $\alpha = \mathbf{0}$. Questa inclusione del giudizio viene designata da Mac Coll con

$$\alpha : \beta,$$

dove però il valore del segno : non coincide con quello assegnato dal Peano.

Continuando in questa maniera, si può sviluppare la teoria del calcolo coi giudizii: ma si vede subito che è lo stesso simbolismo, che prima usammo pei concetti; così che dando ai segni ambe le interpretazioni (una volta come simboli di classi, l'altra come simboli di proposizioni) coi teoremi ed operazioni poc'anzi svolti, vengono trattate contemporaneamente le dottrine del concetto e del giudizio (Peirce).

Il calcolo logico culmina coi due teoremi seguenti (Boole):

I. Teorema di sviluppo (analogo del teorema di Taylor):

Ogni classe b può venire espressa linearmente ed omogeneamente per mezzo d'ogni altra a:

$$b = f(a) = xa + ya_1,$$

dove x ed y sono coefficienti indipendenti da a, e rispettivamente eguali a $f(\mathbf{1})$ e $f(\mathbf{0})$ – ciò che si ricava dall'espressione superiore con la sostituzione di $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ per a –; così che

$$f(a) = f(\mathbf{1})\,a + f(\mathbf{0})\,a_1.$$

La formula analoga per due argomenti è

$$f(a, b) = f(\mathbf{1}, \mathbf{1})\,ab + f(\mathbf{1}, \mathbf{0})\,ab_1 + f(\mathbf{0}, \mathbf{1})\,a_1b + f(\mathbf{0}, \mathbf{0})\,a_1b_1$$

e così via.

Si può notare che la somma dei fattori dei coefficienti $f(\mathbf{1})$, $f(\mathbf{0})$ e rispettivamente $f(\mathbf{1}, \mathbf{1})$, $f(\mathbf{1}, \mathbf{0})$, ... è eguale ad $\mathbf{1}$, e che gli stessi fattori (*costituenti*) son fra di loro disgiunti, cioè i prodotti di due di loro, p. e. a, a_1, $(ab), (ab_1)$... svaniscono.

II. Teorema di risoluzione ed eliminazione.

Dall'equazione

$$f(a) = xa + ya_1 = \mathbf{0} \qquad (^{17})$$

si può sempre ricavare a oppure eliminarlo, ed è

$$xy = f(\mathbf{1})\,f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

il risultato dell'eliminazione, ed

$$a = ux_1 + y = u\,f(\mathbf{1})_1 + f(\mathbf{0})$$

la risoluzione completa dell'equazione per a, dove u indica una classe arbitraria che può variare da $\mathbf{0}$ ad $\mathbf{1}$.

III. Raziocinio

Dallo studio delle relazioni scambievoli dei giudizii scaturisce la teoria del ra-

ziocinio. Questa è analoga a quella del giudizio considerato quale rapporto di concetti, ma non può essere oggetto di questa memoria, che si limita alla considerazione delle leggi fondamentali del calcolo logico ([18]).

II.

Critica delle teorie attuali.

La teoria che ora esponemmo brevemente, è certo interessante, perchè, come bene osserva lo Schröder, i massimi problemi che si possono incontrare nel campo della stessa, sono anche risolti, dagli ultimi teoremi.

Ma pure con una analisi attenta vi si scorgono alcuni lati deboli. Wundt ha già fatto rilevare che non vi è una espressione adeguata pel giudizio particolare; per il giudizio individuale poi, lo sviluppo secondo una data classe a, si riduce ad una mera tautologia ([19]). Però dove si mostra evidentemente in difetto è nella teoria della definizione ([20]), che è la determinazione di un concetto mediante le sue note (proprietà, attributi). Quindi mediante il suo contenuto: ed è appunto questo che viene trascurato, considerando sempre i concetti esclusivamente secondo la loro sfera.

Eppoi mi sembra che i concetti di ente e di classe non sieno convenientemente chiariti. Il Peano ([21]) ne presuppone la definizione; lo Schröder ([22]) chiama classe un pezzo della varietà logica, il Grassmann ([23]) una somma di elementi; ma l'ultimo non definisce questi, come il primo parla tenebrosamente del campo logico ([24]). Dunque quali sono questi elementi? da che vengono caratterizzati? ed il campo logico è continuo? univoco? finito?, può venire espresso da una varietà, e di quante dimensioni?

Senza una definizione esatta di questi concetti, non si sa fino a qual punto sieno valevoli le applicazioni della matematica alla logica; cioè si può domandare: sono tutte le rappresentazioni, tutti i giudizii ... in breve tutte le forme logiche comprese dai simboli che s'usano, o no? cioè, le formule stabilite valgono per tutto il campo del pensabile, oppure valgono soltanto per sistemi speciali di enti, i quali devono obbedire a certe condizioni; anzi s'hanno in generale degli enti per cui valgono?

Questa domanda sembrerà forse spettare più alla logica ed alla metafisica che alla matematica, ma senza una risposta – la quale, come vedremo, è semplice ed importante; che, cioè, valgono per tutto il pensabile – manca una qualche cosa che sia come il teorema esistenziale dell'analisi, col quale si mostra che le equazioni hanno radici; e che dimostri che le relazioni, che si studiano, sono realmente espressioni di relazioni esistenti nella logica.

L'indecisione dei varii autori nel porre i fondamenti per il calcolo logico, ha ancora un'altra radice, che accenna ad un ὕστερον πρότερον dipendente dal metodo.

I due tipi di pertrattazione – di Grassmann e di Schröder – hanno questo di comune, che essi partendo da un principio ammesso, deducono le conseguenze che ne derivano, cioé vanno dal generale, dall'astratto al particolare, al concreto. Essi concordano nel metodo sintetico, col quale venivano pure condotte le ricerche di quel tempo risguardanti la teoria delle funzioni, delle scuole di Riemann e Cauchy. Un metodo, il quale benchè conduca a brillanti risultati ha sempre in sè alcunchè di indeciso e di insecuro, che si fa sentire nella comprensione completa delle proposizioni, nella precisa valutazione della portata delle prove.

Ho cercato pertanto di fondare il calcolo logico in un modo più rigoroso; e precisamente seguendo l'esempio grande ed istruttivo del ch. prof. Weierstrass, analiticamente; partendo da fatti empirici, che si hanno specialmente dall'osservazione delle relazioni fra i concetti – l'espressione delle quali dà il giudizio, che è il primo dato dall'esperienza, – derivare semplici leggi e colla ripetizione di un procedimento già definito e conforme alla natura, cioè dell'algoritmo della moltiplicazione (determinazione), giungere al concetto dell'ente (elemento).

Da questo risulterà facilmente il campo logico (varietà), come luogo di tali enti; e si esamineranno le sue proprietà. Collo stabilire le operazioni fra questi elementi si ricaverà il concetto della classe, e così, con una investigazione rigorosa dei teoremi fondamentali, verrà resa possibile una congiunzione con gli studi attuali.

In breve, anzichè partire dalla considerazione delle operazioni coi simboli ed esaminare poi se valgano nella logica, si considererà subito tutto il pensabile e si mostrerà che vi valgono tali relazioni.

III.

Quantità logiche e loro operazioni.

Diciamo *quantità logica* tutto ciò che può essere pensato (senza contraddizione logica) ([25]).

Queste quantità possono venir comparate fra loro nell'unità della mente, e da questa comparazione otteniamo le seguenti tre relazioni possibili:

I. Con una quantità a viene pensata anche l'altra b.
II. Con una quantità a viene pensata parte della b.
III. Con una quantità a non viene pensata la b.

Questi sono gli ultimi postulati della logica, che rendono possibile il passaggio da un pensiero all'altro e su queste relazioni (inclusione, esclusione parziale o totale) si basano tutte le operazioni logiche.

Si vede che nell'idea di quantità logica è compreso sì il concetto, che il giudizio, il raziocinio e in generale qualunque formazione logica ancor più complicata,

che sono sempre oggetto diretto del pensare e che si trovano fra di loro in una delle tre suddette relazioni.

Però presentemente ci limiteremo a studiare il concetto e le sue relazioni.

Si possono rendere visibili le tre suddette relazioni colla rappresentazione grafica dei concetti mediante cerchi od altre figure chiuse nel piano (fig. 1-3): ma su questa illustrazione sensibile parlerò più diffusamente in un prossimo lavoro; ed intanto non bisogna supporre che questa sia una rappresentazione inappuntabile della cosa, e, molto meno, attribuirle una qualsiasi forza di prova.

Prendiamo dalla I relazione la nozione della disuguaglianza e diciamo che

$$a > b \quad , \quad b < a$$

oppure che a contiene b, quando b è pensato con a, ma non viceversa. Dalla II segue necessariamente la divisibilità in parti della quantità logica a, poichè essa consta almeno di due pezzi, uno incluso, l'altro escluso da b. Dalla III diciamo che a e b si escludono a vicenda, e, ancora, denotando con a_1 tutto ciò che non viene pensato con a, possiamo ridurre l'esclusione ad una inclusione nella negazione di un concetto e scrivere

$$a_1 > b \quad , \quad b_1 > a.$$

Intenderemo colla scrittura

$$a + b$$

la minima quantità logica contenente a e b – cioè ciò che viene pensato da a o da b.

Colla scrittura

$$ab$$

la massima quantità logica contenuta in a e b – cioè ciò che viene pensato contemporaneamente da a e da b (nella fig. 2 il pezzo tratteggiato).

Ancora, essendo $a > b$, denotiamo con

$$a - b$$

la massima quantità contenuta in a ma non in b – cioè ciò che viene pensato da a ma non da b (nella fig. 1 il pezzo tratteggiato).

Se nella I relazione a contiene b e viceversa, allora si scrive

$$a = b$$

e

$$a - b = \mathbf{0}.$$

Dimostreremo il seguente

TEOREMA. *Le operazioni della somma* (a + b), *del prodotto* (ab) *e della differenza* (a − b) *logica sono sempre eseguibili ed univoche cioè hanno* un *significato*: e precisamente 1.° *la somma, sempre*; 2.° *il prodotto, quando i fattori sono fra loro nella* I *o* II *relazione*; 3.° *la differenza, quando le due quantità logiche sono nella* I *relazione*.

1.° Dati a e b si prenda una quantità α_1 che soddisfi alla diseguaglianza

$$\alpha_1 \geq a\,,\, b.$$

Una tale quantità si può sempre trovare, e nel caso più sfavorevole abbraccia tutto il pensabile, nel quale a e b, quantità logiche, devono essere certo contenute, per definizione. Allora si potrà trovare una quantità α_2 tale che sia

$$\alpha_2 < \alpha_1\,,$$

$$\alpha_2 > a\,,\, b\,,$$

oppure non la si può trovare. In quest' ultimo caso è, per la definizione della somma

$$\alpha_1 = a + b.$$

Nel caso che si trovi un tale α_2, si cercano successivamente un α_3, un α_4..., che soddisfino alle disuguaglianze

$$\alpha_k < \alpha_{k-1}\,,$$

$$\alpha_k \geq a\,,\, b\,, \qquad (k = 1\,, 2\,, 3 \ldots n \ldots).$$

Dovendo gli α_k mantenersi sempre maggiori di a e di b, la serie decrescente degli stessi avrà, per un noto teorema d'algebra, *un* limite inferiore α $(\geq a\,,\, b)$, e sarà

$$\alpha = a + b\,, \qquad \text{(vedi fig. 4–6)}.$$

COROLLARIO 1.° Se è (fig. 4)

$$a \geq b$$

oppure se è

$$\alpha_k = a\,,$$

segue

$$\alpha\,(= \alpha_k) = a + b = a.$$

Corollario 2.° Essendo definita la somma logica è anche definita la negazione a_1 di un concetto a.

a_1 è la somma di tutte le quantità b che stanno con a nella III relazione.

Si dimostra subito che la negazione della negazione è la posizione di a; poichè, per definizione, data la quantità a_1, una quantità che sta con a_1 nella III relazione è a: ora essa è anche l'unica. Se vi é un'altra quantità b che sta con a_1 nella III relazione, essa starà in *una* relazione con a. Ora non lo può essere nella II, nè nella III: perchè, in tali casi, parte di b oppure tutto b sarebbe compreso in a_1, contro l'ipotesi. Dunque deve stare con a nella I relazione, e, non potendo essere

$$b > a,$$

perchè in tal caso $b - a$, che è parte di b, sarebbe compreso in a_1, deve essere

$$a \geq b$$

e, per il corollario precedente,

$$a + b = a.$$

Quindi la somma di tutte le quantità che stanno nella III relazione con a_1, cioè $(a_1)_1$, è uguale ad a, c. v. d.

2.° Date le due quantità a e b esse saranno in una delle due prime relazioni o nella III. In quest'ultimo caso ab non esiste, non essendovi alcuna quantità pensata contemporaneamente da a e da b.

Se a e b sono in una delle due prime relazioni, possiamo dare una quantità compresa da a e da b; sia questa α_1. Allora si potrà trovare una quantità α_2 tale che sia

$$\alpha_2 > \alpha_1,$$

$$\alpha_2 \leq a, b,$$

oppure non la si potrà trovare. In quest' ultimo caso è, per la definizione del prodotto,

$$\alpha_1 = ab.$$

Se vi ha un tale α_2, si cercano successivamente un α_3, un $\alpha_4 \ldots$, che soddisfino alle disuguagliauze

$$\alpha_k > \alpha_{k-1},$$

$$\alpha_k \leq a, b, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots n \ldots).$$

Dovendo gli a_k mantenersi sempre minori di a e di b, la serie crescente degli stessi avrà, per un teorema d'algebra, *un* limite superiore α $(\leq a_1, b)$, e sarà

$$\alpha = ab \qquad \text{(vedi fig. 7-8).}$$

Corollario. Se è (fig. 7)

$$b \leq a$$

oppure se è

$$\alpha_k = b$$

segue

$$\alpha \, (= \alpha_k) = ab = b.$$

3.° Sieno date le due quantità logiche a e b. Se esse si trovano in una delle due ultime relazioni, non sussiste l'ineguaglianza

$$a > b$$

e quindi non si può parlare di differenza. Se esse si trovano nella I relazione allora si potrà trovare un α_1 tale che sia

$$\alpha_1 < a, b_1, \qquad (b_1 \text{ è la negazione di } b),$$

oppure no. In quest'ultimo caso a contiene b, e viceversa, ed è

$$a - b = 0,$$

per definizione.

Se si può trovare un tale α_1, si cerchi un α_2 tale che sia

$$\alpha_2 > \alpha_1,$$

$$\alpha_2 < a, b_1,$$

Se non lo si può dare, sarà, per la definizione della differenza,

$$\alpha_1 = a - b.$$

Altrimenti, si cerchino successivamente $\alpha_2, \alpha_3 \ldots$ tali, che soddisfino alle disuguaglianze

$$\alpha_k > \alpha_{k-1},$$

$$\alpha_k < a, b_1; \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots n \ldots).$$

Gli a_k continuamente crescenti, mantenendosi però sempre inferiori di a, hanno *un* limite superiore α ($\leq a$), ed è

$$\alpha = a - b \qquad \text{(vedi fig. 9).}$$

IV.

Ente logico.

Sia data una quantità a, allora si potrà trovare un tale b, che sia nella II relazione con a, oppure no. In quest'ultimo caso chiamiamo a un *elemento* (*ente*) ed esso starà con ogni altra quantità o nella relazione I o nella III.

Nel caso che si trovi un b, esisterà una quantità ab. Con ab procediamo come con a; e si darà una quantità c che sia con ab nella II relazione, e quindi si darà abc, oppure no. Nel primo caso procediamo con abc come procedemmo con ab, e così via. Allora si domanda: si arriva con un tale procedimento (moltiplicazione logica, determinazione), in generale, ad un elemento oppure no? E, giacchè è certo che tali elementi realmente esistono, poichè per ogni concetto individuale vale il *principium exclusi tertii*, cioè deve stare o nella I o nella III relazione, si può arrivare, col procedimento, di cui sopra, ad un dato elemento stabilito?

Si dice che un ente x, che è compreso in una quantità a (relazione I), possiede a come nota. L'operazione con la quale si rappresenta un ente mediante le sue note si dice *definizione* dell'ente.

Poichè ora la quantità $a_1 a_2$ è formata da tutte quelle che possiedono contemporaneamente a_1 ed a_2 come note, così conoscendo le due note a_1 ed a_2 di x, si sa che x è compreso in $a_1 a_2$. Se anche la a_3 è nota, allora è compreso in $a_1 a_2 a_3$, e così via.

Finalmente se si conoscono n note di un ente x, allora si arriva ad una quantità

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

dove è certamente contenuto x. Ora possono darsi due casi:

1.° si può dare un tale n, che sia

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = x$$

oppure

2.° non si può dare; ed allora, per quello che precede, è sempre

$$\prod_{i=1}^{n} a_i > x$$

ossia, oltre di x, esistono ancora altri enti contenuti in

$$\prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Nel 1) caso x è definito dalle n note, nel 2) la definizione non è compiuta; ma si può dimostrare che con n sufficientemente grandi, la quantità

$$\prod_{i=1}^{n} a_i - x$$

tende al limite **0**. Ciò è detto più precisamente dal seguente

TEOREMA. *Chiamato* x *un dato ente ed* a_i ($i = 1, 2, \ldots n$), n *sue note, per ogni grandezza logica* δ, *comunque piccola e rappresentabile nella forma* $\prod_{i=1}^{m} a_i$, *esiste un* N *tale, che per ogni*

$$n > N, \quad [28]$$

è

$$\prod_{i=1}^{n} a_i - x < \delta.$$

Difatti è, per l'ipotesi,

$$\prod_{i=1}^{n} a_n > x$$

quindi

$$\prod_{i=1}^{n} a_i - x > 0.$$

Or basta mostrare che $\prod_{i=1}^{n} a_i$, con n crescente, può essere fatto quanto piccolo ci piace [29].

Per provar ciò, osserviamo che è sempre possibile trovare un tale a_{n+1}, che sia

$$\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n+1} a_i > 0.$$

Che sia

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \geq \prod_{i=1}^{n+1} a_i$$

cioè

$$\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n+1} a_i \geq 0$$

vedemmo nel numero III, 2.°.

Or se non fosse possibile trovare un a_{n+1} tale che sia

$$\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n+1} a_i > 0 ,$$

dovrebbe essere sempre

$$\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n+1} a_i = 0$$

cioè

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n+1} a_i .$$

Ed allora l'aggiunta della nota a_{n+1} non avrebbe alcuna influenza sulla ulteriore delimitazione della quantità $\prod_{i=1}^{n} a_i$, ciò che è contro l'ipotesi

$$\prod_{i=1}^{n} a_i > x ,$$

che dice esservi in $\prod_{i=1}^{n} a_i$, oltre x ancora altre (almeno una) quantità diverse, le quali devono in certo modo distinguersi le une dalle altre, cioè possedere diverse proprietà: poichè se tutte avessero note uguali, si coprirebbero in *una* grandezza, o, in altri termini, con x sarebbe pensato tutto il $\prod_{i=1}^{n} a_i$, e poichè naturalmente x è pensato con $\prod_{i=1}^{n} a_i$, sarebbe

$$\prod_{i=2}^{n} a_n = x ,$$

contro l'ipotesi.

Quindi per queste quantità, che posseggono in comune le prime n note, vi deve essere una nota a_{n+1} tale, che alcune la posseggano, altre no: e l'aggiunta della

nota a_{n+1}, escludendo le ultime mentovate, esercita un'influenza sulla delimitazione del $\prod_{i=1}^{n} a_i$.

Allora si può fare $\prod_{i=1}^{n} a_i$, con un n sufficientemente grande, piccolo quanto ci piace, e, specialmente, prendendo

$$n \geq m + 1,$$

se lo può fare minore di $\prod_{i=1}^{m} a_i$ o di δ; quindi, poichè, per definizione della differenza, è

$$\prod_{i=1}^{n} a_i - x \leq \prod_{i=1}^{n} a_i,$$

sarà *a fortiori*

$$\prod_{i=1}^{n} a_i - x < \delta$$

c. v. d.

Da ciò segue che, con un numero sufficientemente grande di note, si può avvicinarsi quanto si vuole ad un ente, sussistendo nel limite l'eguaglianza,

$$\lim \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right) = x \qquad \text{(vedi fig. 10).}$$

Noi diciamo anche questa una definizione, in senso lato; scegliendo le note $a_1 a_2 \ldots a_n$ in modo che esprimano le qualità essenziali dell'ente da definirsi, ed astraiamo dalle note accidentali, che ancora mancassero ([30]). Così che, per scopi determinati, possiamo sostituire $\prod_{i=1}^{n} a_i$ con x, cioè pensare scambievolmente uno con l'altro: e sussiste l'eguaglianza.

V.

Spazio logico.

Si giunse al risultato, che, con un numero n sufficientemente grande di note, si può rappresentare ogni elemento; e così è risolta la questione della definizione di un dato ente.

In questa maniera di dipendenza dell'ente dalle sue note, si può ravvisare la relazione, nella quale un *elemento* (*punto*) di una *varietà* (*moltiplicità*, *Mannigfaltigkeit*) di n dimensioni, viene fissato da n variabili indipendenti (*coordinate*).

Ma possiamo proseguire avanti con questa analogia e mostrare in primo luogo la caratteristica della stretta corrispondenza fra gli elementi ed i parametri, cioè la proposizione che « ad ogni elemento corrisponde *un* conveniente sistema di valori $a_1\, a_2 \,..\, a_n$ » ed anche viceversa « ad ogni sistema conveniente di tali valori corrisponde *un* ente » ([31]). La seconda parte del teorema dice che per un sistema conveniente di note corrisponde *un* elemento.

Un sistema di note è scelto convenevolmente quando soddisfa al procedimento del numero IV; cioè quando il prodotto

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

esiste realmente: e questo è il caso quando nessuna delle note a_i si trova con un'altra delle note stesse nella III relazione (nel quale caso il prodotto non esiste), quindi quando nessuna sia disgiunta dalle altre. Allora si avrà sempre un pensiero logicamente possibile, cioè senza contraddizione interna e quindi una quantità logica.

Questa si riduce da ultimo ad un elemento, quando le note sono prese in modo che, per certi n:

$$\prod_{i=1}^{n+1} a_i < \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Dalla definizione dell'eguaglianza segue da ultimo l'univocità di un ente così definito.

Per provare la continuità della varietà logica formata dal complesso di tutti gli enti, introdurremo il concetto della grandezza o del grado (intensità) col quale un ente possiede una nota.

Abbiamo veduto che un elemento e è fissato da n note. Ora uniamo assieme, moltiplicandole $n-1$ di tali note, in una quantità ε_1 (*genus proximum*), cui distinguiamo quindi ancor più da vicino coll'aggiunta dell' n^{ma} nota a_1 (*differentia specifica*). Io dico ora che a_1 si può ridurre ad un numero — che diremo *grandezza* della quantità ε_1 —, il quale è proporzionale al grado col quale l'elemento e possiede la proprietà $\varepsilon_1 \left(= \prod_{i=2}^{n} a_i\right)$ ([32]).

Per maggiore chiarezza consideriamo un elemento e, il quale possiede la nota ε_1; allora, secondo la rappresentazione grafica (fig. 11), giace entro ε_1. Ciò che lo distingue da altri enti $e' = a_1'\varepsilon_1'$, che anche giacciono entro ε_1, è naturalmente una diversa posizione di detto ente. Ma è sicura ancora la cosa seguente: che se e giace *entro* ε_1, allora il valore di a_1 denota che e possiede la nota ε_1; se all'incontro e giace *fuori* di ε_1, allora a_1 — che noi prenderemo in tal caso come negativo — esprime che e possiede come nota la negazione di ε_1. Quindi, in gene-

rale, la posizione dell'elemento – e quindi a_1 – è dipendente dal modo nel quale l'ente possiede la nota ε_1; e precisamente intanto se positiva o negativa.

Due elementi diversi che giacciono entrambi entro ε_1, hanno, come si disse, la forma $a_1 \varepsilon_1$, $a_1' \varepsilon_1$, dove a_1 ed a_1' sono entrambi positivi, ma fra loro diversi: chè se fossero uguali, sarebbe anche $e = e'$, contro l'ipotesi. Si osservi ora che non tutti gli enti giacenti in ε_1 possiedono egualmente la nota ε_1; cioè non tutti hanno un egual grado della proprietà ε_1. P. e. non tutti i corpi sonori producono un suono di egual grado – rispetto all'altezza non fanno un egual numero di vibrazioni. Ma nel concetto di suono cadrà il suono prodotto da più e quello da meno vibrazioni; nella sfera di ε_1 sono compresi tutti gli enti che hanno tale proprietà in grado massimo e minimo. Ora che cosa potrà distinguere il grado che di tale proprietà ha un ente a differenza di un altro situato entro la sfera stessa? Soltanto la *posizione* di detti enti entro la sfera – e quindi il parametro a_1, funzione della detta posizione. Cioè noi non possiamo supporre arbitraria ed indifferente la posizione di tutti i concetti e racchiusi in ε_1, ma dobbiamo disporli in modo tale, da poter giudicare dalla loro posizione il grado con cui essi posseggono tale proprietà. Noi possiamo adunque assegnare ad a_1 ed a_1' - che, come vedemmo, sono parametri variabili colla posizione dell'ente – valori numerici proporzionali al grado col quale essi possedono la nota ε_1; perchè appunto il grado dipende dalla posizione.

Nella rappresentazione grafica mediante circoli (proiezioni delle *sfere* dei concetti), il grado col quale un ente e possiede una nota ε_1 è inversamente proporzionale alla distanza α (fig. 12) di detto ente dal centro (C) del circolo rappresentante la nota ε_1: essendo per

$$\alpha > r$$

a_1 negativo, e per

$$\alpha < r$$

a_1 positivo. Il grado è massimo al centro: alla periferia è nullo.

Si osservi intanto che la definizione della grandezza della quantità logica, misurato dal parametro a_1, è data indipendentemente dalla rappresentazione grafica. Noi abbiamo detto, che ridotto un elemento alla forma

$$e = a_1 \prod_{i=2}^{n} a_i$$

possiamo attribuire ad a_1 un valore numerico proporzionale al grado col quale e possiede la nota $\prod_{i=2}^{n} a_i$: essendo che vi ha sempre nella qualità un elemento quantitativo, un grado (vedi annotazione 32). Così, prendendo due suoni di eguale intensità, noi li possiamo distinguere dalla loro diversa altezza, e stimare a_1 secondo il numero delle vibrazioni. Similmente possiamo distinguere due toni egual-

mente acuti, dalla loro intensità (forza). In generale ogni tono elementare si può rappresentare nella forma

$$e = a_1 \varepsilon_1 \cdot a_2 \varepsilon_2$$

dove il primo fattore concerne l'altezza, il secondo l'intensità. Qui a_1 ed a_2 rappresentano la grandezza delle coordinate, la cui unità – che caratterizza la nota – è rispettivamente ε_1 ed ε_2 ([33]).

Lo stesso vale naturalmente per un numero maggiore di note ([34]).

Però di solito non si procede ad una determinazione più precisa degli a, e ci accontentiamo nel più dei casi col dire se sia positivo o negativo, poichè tali sottigliezze del pensiero di una logica rigorosa, non sono praticamente accessibili nè al linguaggio nè alle facoltà della nostra mente.

Questo però non cambia la cosa. Perchè i coefficienti, positivi o negativi, che si lasciarono ulteriormente indeterminati, rappresentano sempre grandezze fisse, che possono in certi altri casi, dove si procede più rigorosamente, venire determinate ([35]). Del resto questo fatto concorda col concetto usuale dell'eguaglianza, dove, come vedemmo prima, si pongono senz'altro fra di loro eguali due quantità che hanno comuni le proprietà essenziali, senza procedere a dettagli più minuti e trascurando — o al più indicando se sono positive o negative — le proprietà meno interessanti.

Data una quantità ε_k, ogni ente o vi appartiene o no: quindi ha sempre la proprietà $a_k \varepsilon_k$, dove secondo che a_k è positivo o negativo, ha luogo il primo o il secondo caso. Quindi ogni elemento e si può rappresentare nella forma

$$e = \prod_{k=1}^{n} a_k \varepsilon_k,$$

dove $\alpha_k = a_k \varepsilon_k$ rappresentano le note, ed a_k sono i coefficienti numerici proporzionali al grado con cui e possiede la nota ε_k.

Facciamo che la grandezza a_k varii di una quantità infinitamente piccola da_k, allora otteniamo l'elemento ([36])

$$\prod_{k=1}^{n} (a_k + da_k) \varepsilon_k,$$

che chiameremo un elemento infinitamente vicino o contiguo all'elemento e.

Il passaggio da uno all'altro può avvenire in modo continuo, con un da_k convergente verso zero (p. e. in due suoni susseguenti in una sirena, col rafforzare gradatamente il soffio del mantice). E così è dimostrata la continuità dello *spazio*

o varietà logica, intendendo con questo termine il luogo di tutti gli enti

$$\prod_{k=2}^{n} a_k \varepsilon_k ,$$

percorrendo a_k tutti i valori ([37]).

VI.

Operazioni cogli enti. Classe logica.

Si può mostrare facilmente che lo spazio logico si estende all'infinito, se consideriamo gli elementi con coordinate a_k infinitamente grandi, come posti in distanza infinita, in queste direzioni.

Poichè per ogni dato ente e con coordinate a_k grandi a piacere, può essere costruito un altro e', le cui rispettive coordinate a_k' sono sempre maggiori di a_k. Poichè un tale

$$e' = \prod_{k=1}^{n} a_k' \varepsilon_k$$

è, secondo la definizione, un concetto privo di contraddizione, e precisamente un elemento.

Qui va aggiunta l'osservazione, che a_k in generale è una grandezza numerica, ma tuttavia è considerata contemporaneamente come una quantità logica, cioè, colla stessa si opera secondo le leggi delle operazioni logiche; p. e. se è

$$a_k = 5 \quad , \quad a_k' = 6$$

essendo

$$a_k a_k = a_k$$

$$a_k a_k' = 0$$

segue

$$5 \cdot 5 = 5$$

$$5 \cdot 6 = 0.$$

Poichè questi numeri, come pensieri senza contraddizione, rappresentano quantità logiche ([38]).

Si può adoperare per l'elemento

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \varepsilon_k$$

il simbolo multiplo (« *multiple symbol* » Cayley)

$$(a_1\, a_2 \ldots\ldots a_k)$$

che significa un numero composto da n unità (« *extraordinaries* ») ; ma colla differenza essenziale dai numeri comunemente usati, che, cioè, gli stessi constano di unità (ε_k) moltiplicate per i fattori numerici (a_k), ma congiunte non additivamente come p. e. nei numeri alternanti ([39]) (« *alternirende Zahlen* » Hankel) della forma

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, \varepsilon_k\,,$$

ma moltiplicativamente :

$$\prod_{k=1}^{n} a_k\, \varepsilon_k.$$

Un significato particolare ottiene il caso

$$a_k = 0\,;$$

allora la proprietà ε_k non è posseduta nè positiva nè negativa; quindi neppure se la considera ; si astrae da essa, se la cava via dal prodotto, cioè lo stesso viene diviso per $a_k\, \varepsilon_k$, oppure è posto

$$\mathbf{0} \cdot \varepsilon_k = \mathbf{1}$$

(per il significato di 0, 1, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ vedi annotazione 38).

Coll'annullarsi di una proprietà a_k, oppure colla divisione per $a_k\, \varepsilon_k$ si riduce il simbolo di una dimensione ; cioè, col porre

$$a_1 = 0\,,$$

$$(0\,,\, a_2 \ldots\ldots a_n)$$

rappresenta un elemento in una varietà di $n-1$ dimensioni, oppure ∞^1 tali elementi in una di n dimensioni – punto in uno spazio $(n-1)$ dimensionale, linea in uno spazio n dimensionale.

Così p. e. tutti i colori possono essere rappresentati da una triplice varietà, cioè essere dati nella forma

$$(a_1\, a_2\, a_3)$$

« insofern jede Farbe, nach Th. Young's und Q. Maxwell's Untersuchungen,

dargestellt werden kann als die Mischung dreier Grundfarben (ε_k), von denen jeder ein bestimmtes Quantum (a_k) anzuwenden ist.

Mit dem Farbenkreisel kann man solche Mischungen und Abmessungen wirklich ausfinden. (E prosegue):

« Ebenso könnten wir das Reich der einfachen Töne als eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen

$$(a_1\, a_2)$$

betrachtet werden, wenn wir sie nach Tonhöhe und Tonstärke verschieden nehmen » ([40]). La diversità del *timbro* (colorito) non viene considerata perchè essa dipende, come è noto, solo dai suoni armonici che accompagnano il tono fondamentale: quindi essa è rappresentata da una somma di suoni semplici.

Il simbolo

$$(a_1\, a_2 \ldots\ldots a_k)$$

rappresenta ogni quantità logica. Così p. e.

$$(\mathbf{1}\,, 0\,, \ldots\ldots 0)$$

rappresenta ε_k,

$$(0\,, 0\,, \ldots\ldots 0)$$

1; La quantità logica svanisce se alcun

$$a_k = \mathbf{0}:$$

$$(a_1\, a_2 \ldots \mathbf{0} \ldots a_n) = \mathbf{0}.$$

Procediamo alle operazioni con gli enti or definiti.

Il prodotto di due enti

$$e = (a_1\, a_2 \ldots a_n) \quad , \quad e' = (a_1'\, a_2' \ldots a_n')$$

è, per la proprietà associativa della moltiplicazione delle quantità logiche:

$$ee' = (a_1\, a_2 \ldots a_n)(a_1'\, a_2' \ldots a_n') = (a_1 a_1'\, a_2 a_2' \ldots a_n a_n')$$

e se non sono tutti gli

$$a_k = a_k' \qquad\qquad (k = 1\,, 2\,, \ldots n)\,,$$

nel quale caso

$$e = e'$$

ed

$$ee' = ee = (a_1 a_1\ a_2 a_2 \ldots a_n a_n) = (a_1\ a_2 \ldots a_n) = e\ ;$$

per due diversi a_k ed a_k', è

$$a_k\ a_k' = 0$$

e segue sempre

$$ee' = 0.$$

Quindi il prodotto di due enti è sempre di nuovo un ente, o nullo.

La somma di due enti significa la sussistenza contemporanea dei punti

$$(a_1\ a_2 \ldots a_n) \quad e \quad (a_1'\ a_2' \ldots a_n'). \qquad (^{41})$$

Se è

$$a_k = a_k' \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

allora è anche

$$e + e = e.$$

Analogamente per più elementi, il prodotto

$$\prod_{k=1}^{n} e_k = 0,$$

eccetto il caso in cui tutti gli

$$e_k \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

sono fra loro eguali e

$$\prod_{k=1}^{n} e_k = e^n = e. \qquad (n \text{ è numero intero e positivo}).$$

Quindi il prodotto di più enti è di nuovo un ente, o nullo.

La somma di più enti e_k,

$$a = \sum_{k=1}^{n} e_k$$

rappresenta una quantità logica che, eccetto un caso, non è più un ente, potendo a trovarsi con un altra quantità logica in una qualunque delle 3 relazioni.

Chiameremo questa quantità a, che consta di una pluralità di elementi, una *classe logica* in senso lato.

Il caso d'eccezione è quando tutti gli

$$e_k \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

sono eguali fra loro, ed allora

$$\sum_{k=1}^{n} e_k = ne = e. \qquad (n \text{ è numero intero e positivo})$$

Posta la sussistenza, facilmente dimostrabile, della proprietà distributiva fra l'addizione e la moltiplicazione di elementi, si possono dedurre le leggi per le operazioni colle classi a.

Il prodotto di due classi a ed a'

$$a = \sum_{k=1}^{m} e_k \qquad a' = \sum_{i=1}^{n} e_i'$$

è

$$aa' = \sum_{k=1}^{m} e_k \cdot \sum_{i=1}^{n} e_i' = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} e_k e_i',$$

quindi di nuovo una somma di elementi $e_k e_i'$ già definiti. E precisamente se alcuni

$$e_k = e_i'$$

allora

$$e_k e_k = e_k.$$

Tutti gli altri e_k ed e_i' fra loro diversi dànno

$$e_k e_i' = 0,$$

quindi rimane solamente

$$aa' = \sum_{k=1}^{m} e_k \cdot \sum_{i=1}^{n} e_i' = \sum_{k=1}^{f} e_k e_k = \sum_{k=1}^{f} e_k,$$

se si dànno f paia di enti e_k ed e_i' fra loro eguali.

Quindi aa' rappresenta una classe formata da tutti gli enti comuni ad a ed a'. Se non vi è alcun elemento tale, è, naturalmente,

$$aa' = 0.$$

Così pure la somma

$$a + a'$$

di due classi è di nuovo una classe. E se in

$$a + a' = \sum_{k=1}^{m} e_k + \sum_{i=1}^{n} e_i'$$

alcuni

$$e_p = e'_q,$$

questi elementi comuni compaiono una sol volta nella somma, essendo

$$e_p + e_p = e_p.$$

Gli altri elementi che vi entrano sono: la somma degli elementi e_r che compaiono solo in a, e quella degli e_s che compaiono solo in a'.

Quindi $a + a'$ rappresenta una classe di cui fan parte tutti gli enti che sono in a od in a', o in ambedue; e solo questi.

Di speciale importanza sono le classi che constano di una moltitudine ordinata di elementi contigui: essi formano un pezzo continuo dello spazio logico.

Questo concetto di classe in senso stretto, come luogo di un elemento variabile entro certi limiti, p. e. dell'elemento

$$(a_1\, a_2 \ldots a_m\, a_{m+1}\, a_{m+2} \ldots a_n),$$

dove gli $a_m\, a_{m+1}\, a_{m+2} \ldots$ variano dai valori $\alpha_m\, \alpha_{m+1}\, \alpha_{m+2} \ldots$ fino ai valori $A_m\, A_{m+1}\, A_{m+2} \ldots$, corrisponde in realtà al concetto che noi abbiamo di una classe logica ([42]); p. e. al concetto « verde » appartiene una varietà continua di gradazioni del colore, fra certi limiti.

Se gli enti si seguono soltanto in una direzione, cioè gli ∞ elementi si estendono in una dimensione, abbiamo la *retta logica*, ossia la classe di primo grado p. e.

Tempo logico

$$\sum_{a_k=-\infty}^{+} (a_1\, a_2 \ldots a_k \ldots a_n).$$

Una tal retta logica è p. e. il concetto del tempo (*linea temporale*) dove le distanze dal presente ($a_k = 0$) ai momenti passati e futuri si rappresentano con le ascisse a_k positive o negative. Un'altra sarebbe la classe dei numeri reali.

Esso può essere scritto nella forma:

$$(a_1\, a_2 \ldots a_{k-1}\, a_{k+1} \ldots, a_n)$$

dove gli a_k possono essere qualunque ([43]).

Una superficie logica ed un corpo logico, ovvero classi di secondo o terzo grado (cioè bi – o tridimensionali) sarebbero le varietà dei suoni e dei colori, il *piano numerale* ed il nostro solito spazio.

In generale:

$$(a_1\, a_2 \ldots\ldots a_n),$$

dove k degli a sono variabili, rappresenta una classe logica del k^{mo} grado.

E così via procedendo alle categorie più elevate, si arriva all'intero campo del pensabile, che è una classe di grado n^{mo} ossia uno spazio di n dimensioni.

All'equazioni

$$\Pi\, a_k = e_k$$

$$\Sigma\, e_k = a_k$$

corrisponde la relazione fra classe ed elemento – ed analogamente fra classe di ordine superiore od inferiore –, ed il dualismo di Schröder può essere ricondotto alla nota reciprocità geometrica fra il segare ed il proiettare.

ANNOTAZIONI.

(1) Giuseppe Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva.* Torino, Bocca, 1888, V + 170.

(2) In un mio saggio « *sulla determinazione della sede dell'anima* » finito nel gennaio del 1884, si contengono le teorie della definizione di un concetto mediante le sue note, corrispondente alla fissazione di un punto mediante le sue coordinate, e della rappresentazione della varietà logica mediante uno spazio n dimensionale.

(3) P. e. alla psicologia, all'estetica... Sulla applicazione della matematica alla psicologia ha discorso recentemente il ch. prof. Roberto Zimmermann, alla Società filosofica di Vienna. Il discorso è riportato nella Wiener Zeitung numeri 37–39; dei 14–16 febbraio 1889.

(4) Raimondo Lullo (1236–1315) svolge nella sua « *Ars magna* » una teoria delle combinazioni dei concetti, rappresentando tutte le loro relazioni possibili con le varie posizioni di certi dischetti girevoli attorno un centro comune, sovrapposti l'uno all'altro, su i quali erano segnati i concetti fondamentali. Vedi Roberto Ardigò, *La psicologia come scienza positiva.* Mantova, Viviano Guastalla, p. 148 e segg. Bellavitis, *Pensieri sopra una lingua universale*; nelle Memorie dell'Istituto veneto di sc. lett. ed arte, vol. XI, p. 33.

(5) Leibniz ens, *Math. Schriften.* Berlin, 1849, vol. V *Logicae universalis semina* e vol. VII p. 57. Cfr.

Ed. Erdmann, *Leibnitii opera philosophica*, 1840 p. 21 segg.

Ed. Erdmann, *Histoaai linguae characterisљvcc universalis.*

Trendelenburg (op. cit. p. 7–8) osserva, che anche Descartes (ep. 1, nella collezione di Amsterdam del 1863, p. 356 segg. a Marsenne) parlando di una lingua comune, richiede che sia posto fra i pensieri un ordine simile a quello naturale de' numeri. La quale idea è abbastanza vicina al progetto di Leibniz.

([6]) Anche Leibniz (in una lettera ad Enrico Oldenburg–cfr. Trendelenburg op. cit. p. 34) cita i *hieroglipiica Chinensium* come *characteris veré realis exemplum*.

([7]) George Boole

1847. *The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning*. Cambridge, Macmillan. London, G. Bell.

1848. *The calculus of logic*. Cambridge and Dublin math. Journal, v. III, p. 183–198.

1854. *An investigation of the* laws of throught, *on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. London, Walten et Maberly. Cambridge, Macmillan et C° 424 pag. Arthur Cayley aggiunse alla seconda delle opere di su:

1871. *Note on the calculus of logic*. Quart. Journal of pure and applied math. ed. Sylvester, Ferrers etc. London, Longman, v. XI, p. 282–283. Perchè, dice « it appears to me, that the theorie of syllogism as given in Boole's paper *the calculus of logic* may be presented in a more concise and compendious form as follow . . . ».

Le teorie di Boole sono contenute in gran parte nella breve esposizione fatta al numero I.

([8]) William Stanley Jevons

1864. *Pure logic, or the logic of the quality apart from quantity, with remarks on Boole's system and on the relation of logic and mathematics*. London et New-york, 87 pag.

1869. *The substitutions of similars, the true principle of reasoning derived from a modification of Aristotle's dictum*. London, 86 pag.

1879. *The principles of science, a treatise on logic and scientific method*. London 3. ed. 786 pag. Di quest'opera c'è una nuova edizione del 1883.

A. J. Ellis

1873. *On the algebrical analogues of logical relations* (Proc. Royal Soc. of London, v. XXI pag. 497–498), esamina l'ultimo lavoro di Boole.

Charles S. Peirce

1867. 1. *On an improvement in Boole's calculus of logic* (Proc. American Acad. of arts and sc. p. 250–261). 2. *On the natural classification of arguments* (ib p. 261–287). 3. *On a new list of categories* (ib. p. 287–298).

1870. *Description of a notation for the logic of relatives resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic* (estratto dalle Mem. dell'Americ. Acad. v. IX. Cambridge 624 pag. in 4°).

1882, 1885. *On the algebra of logic* (American Journal of math. pure and applied ed. J. J. Sylvester, W. E. Story published under the auspices of the John's Hopkins University, Baltimore, Murphy, 4°, v. III p. 15-58 e v. V). Una recensione dettagliata del dott. Michaelis in Berlino, si trova nel Jahrbuch über die Fortschritte der Math. herausg. C. Ohrtmann. Berlin, Reimer, v. XII p. 41-44.

Hugh Mac Coll

1877, 1878. *The calculus of equivalent statements*, 4 papers: Proc. London math. Soc. v. IX p. 9-20; 177-186; v. X p. 16-28; v. XI p. 113-121. Vedi recensioni nel v. X p. 34-36; v. XJ p. 49-50; v. XIII p. 45 del Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, e nel Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques red. par Darboux etc. Paris, Gauthier 1882, t. VI parte II pagine 205-206, 211, 215. Mac Coll dice (op. cit. I paper) di aver fatte queste ricerche senza conoscere i lavori di Boole; ma possono tuttavia considerarsi una continuazione di questi.

A. Mac Farlane

1878, 1879. *On the principle of the logical algebra, with application.* (Proc. Royal Soc. Edinburgh p. 44-61, 105-111).

B. Halsted

1880. *Algoritmic division in logic.* (Journal spec. Phil. v. XII p. 107). *Statement and reduction of syllogism* (ib. p. 418).

J. Venn dà i primi contributi per una storia del calcolo logico.

1880. *On the various notations adopted for expressing the common propositions of logic* (Proc. Cambridge phil. Soc. v. IV p. 36-47).

On the employament of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions (ib. p. 47-59, e contemporaneamente nel London, Edinburgh and Dublin phil Magazin v. XI p. 1-18). Di questi lavori v'è una breve recensione del prof. Glaisher di Cambridge, tradotta da Ohrtmann nel Jahrbuch über die Fortshritte der Math. v. XII p. 44-45; v. XIII p. 54-55.

On the diagrammatical and mechanical representation of the propositions and reasonings. (London, Edinburgh and Dublin phil. Magazin v. X p. 161-171).

On the implicational and equational logic (ib. v. XI p. 40-43).

B. J. Gilman

1880. *On propositions and syllogisms* (John's Hopkins University Circulars v. II p. 240-241).

On propositions called spurious (ib.).

(9) Egli fu spinto a queste ricerche dagli studii che fece assieme a suo fratello Hermann negli anni 1846-1847, e che avevano lo scopo – come dice V. Schlegel: *Hermann Grassmann Sein Leben und seine Werke.* Leipzig, Brockhaus 1878, p. 31 – « die mathematischen Grundbegriffe einer genauen Revision zu unterwerfen, auf Grund deren eine neue, streng wissenschaftliche Behandlung der elementaren Mathematik unternommen werden sollte ». I risultati della sua attività

letteraria li pubblicò nella « *Wissenschaftlehre oder Philosophie* » Stettin 1872; la cui seconda parte « *die Formenlehre* » concerne specialmente la matematica. Egli divide questa disciplina in quattro rami separati, e riduce le proprietà caratteristiche di queste singole dottrine alle differenti maniere con cui si connettono fra loro eguali elementi (*Verknüpfungsarten gleicher Stiften*), che sono specialmente l'addizione (*Fügung*) e la moltiplicazione (*Webung*) di tali elementi. Cioè, indicando con e un elemento, secondo che si prende una delle seguenti 4 possibili coppie d'equazioni

$$\left.\begin{matrix} e+e=e \\ ee=e \end{matrix}\right\} (1) \qquad \left.\begin{matrix} e+e=e \\ ee\neq e \end{matrix}\right\} (2) \qquad \left.\begin{matrix} e+e\neq e \\ ee=e \end{matrix}\right\} (3) \qquad \left.\begin{matrix} e+e\neq e \\ ee\neq e \end{matrix}\right\} (4)$$

come condizioni fondamentali si ottengono: (1) la « *Begriffslehre* » (logica), (2) la « *Bindelehre* » (teoria delle combinazioni), (3) la « *Zahlenlehre* » (aritmetica) e (4) « l'*Aussen*—o *Ausdehnungslehre* » che, com'è noto, fu fondata da suo fratello.

Dalle leggi fondamentali *sub* (1) e da altre verità assiomatiche egli sviluppa molte proposizioni della logica deduttiva e le raggruppa in 3 sezioni: I. Dottrina del concetto, II. Dottrina del giudizio e III. Dottrina del raziocinio.

(10) Vedine l'autocritica nel Repertorium der lit. Arbeiten aus dem Gebiete der reinen u. angew. Math herausg. Königsberger etc. Leipzig, Teubner 1879, v. II p. 86-87; e la *Note über den Operationskreis des Logikcalculs von E. Schröder* nei Math. Ann. Clebsch, herausg. Klein et Mayer. Leipzig, Teubner 1877 v. XII p. 481-484.

(11) In Germania scrissero ancora su questo argomento

Gottlob Frege: 1879. *Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle a. S. Nebert, 88 pag. Vedi le recensioni nel « Zeitschrift für Math und Phys. herausg. Schlömilch, Leipzig, Teubner 1880, XXV hist. lit. Abth. p. 81-94; Jahrbuch über die Fortschr. d. Math. v. XI p. 48-49; Jenaer Literaturzeitung. Kurt Lassowit 1879 n. 18 p. 245 segg.

Wundt: 1880 nella sua « *logica* » (Stuttgart v. 1, 585 p.) dedica al calcolo logico 52 pagine.

In francese; Delboef: 1877. *Logique algoritmique.* Liège et Bruxelles 95 p.

(12) Il Peano (op. cit. § 1, n. 3, 4) adopera pel prodotto il segno $\frown$ e per la somma il segno $\smile$.

(13) E. Schröder, che credeva d'essere lui lo scopritore di questa proprietà ha più tardi riconosciuta la priorità di Peirce — Rep. der lit. Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angew. Math. etc., v. II, p. 162: In Hinsicht auf die Wahrnehmung der vorstehend angeführten doppelten Distributivität, als auch bezüglich der für logische Differenzen und Quotienten auf S. 29-31 (del « *Opera*

tionskreis » ecc.) von mir aufgestellten Ausdrücke, die Priorität Herrn Peirce zukommt.

([14]) Peirce, Wundt ed altri scrivono, anzichè **1**, ∞; Grassmann T, Peano ●.

([15]) **0** ed **1** sono rispettivamente i *moduli* della somma e del prodotto.

([16]) Poichè, per teoremi precedenti, è:

$$a = a + \mathbf{0} \qquad a = a + ab$$

$$a = a \cdot \mathbf{1} \qquad a = a(a + b)$$

senza che sieno

$$ab = \mathbf{0} \qquad a + b = \mathbf{1}.$$

B. Halsted (vedi nota 8) ha fondata la divisione lógica, polemizzando con Jevons (Journal spec. phil. XII p. 107).

Sulle operazioni inverse parla anche diffusamente lo Schröder (op. cit. § 4 p. 29-37).

([17]) Le identità

$$(a < b) = (b > a) = (ab_1 = \mathbf{0}),$$

e

$$(a = b) = (a < b) \cdot (a > b) = (ab_1 = \mathbf{0}) \cdot (a_1 b = \mathbf{0}) = (ab_1 + a_1 b = \mathbf{0})$$

dicono che ogni equazione logica si può trasformare in un'altra, in cui il secondo membro sia **0**. (Peano op. cit. § 10, p. 18). Un'equazione contenente a si può dunque porre nella forma

$$f(a) = \mathbf{0}$$

e, per il teorema I, nella forma *separata*

$$xa + ya_1 = \mathbf{0}.$$

([18]) La teoria del raziocinio risultante dalle operazioni sulle proposizioni forma il soggetto dei lavori di Grassmann (*Begriffslehre*, 3 Abschnitt), Cayley (Quart. Journ. XI p. 282-283) Gilman (J. Hopkin's univ. circ. v. II p. 240) e di Halsted (Journ. spec. phil. v. XII p. 418), il quale distingue, anzichè le 4 solite forme del giudizio categorico, rappresentate dai logici colle lettere *a*, *e*, *i*, *o*, le 6 di Gilman e le 8 di Morgan: 16 forme di giudizio, dalle quali deduce 256 forme di sillogismi corrispondenti ad altrettante coppie di giudizi, quali premesse. Il Peano pure ne tratta (p. 10-20), e rileva due fatti importanti, che, cioè, i sillogismi secondo la così detta terza figura presuppongono veramente non due ma *tre* premesse: cioè ancora che il termine maggiore non sia nullo (p. 17).

Questa supposizione è anche necessaria per l'asserzione che due proposizioni contrarie non possono coesistere (p. 15).

([19]) Perchè ad ogni concetto individuale b a od a_1 dev' essere una nota (confronta numero IV); ammettiamo, senza ledere la generalità che sia a la nota, per il *principium exclusi tertii medii* lo sviluppo per a si riduce ad un sol membro:

$$b = f(a) = a \cdot f(1)$$

dove però non si sa il significato di $f(1)$ - come prima di $f(a)$, - e l'equazione ci dice solo che a è una nota di b, ciò che era di già stabilito per ipotesi.

Vedremo più tardi che $f(1)$ ha un valore ben determinato, che si ottiene con una convenevole considerazione del contenuto del concetto.

([20]) Il Leibniz ha pure fatto rilevare l'importanza della definizione pel calcolo logico - cfr. Trendelenburg: *Uber das Element der Definition in Leibnitzens Philosophie* (Hist. Beiträge zur Philosophie, v. III p. 48-49); - il Bellavitis pure dice (op. cit. p. 38-39) che per impossessarsi della lingua universale bisogna dare esatte definizioni per stabilire il significato delle parole.

([21]) Peano (op. cit. § 1): « Abbiasi un sistema di enti, e sieno A, B . . . delle classi di questo sistema. Ad esempio si può considerare il sistema di tutti i numeri reali e finiti, e saranno classi di questo sistema i numeri razionali, gli interi . . . ». Questo può stare nel libro del ch. autore, che specialmente si occupa dello studio delle forme logiche che ricorrono nella matematica: ed è quindi più applicazione della logica alla matematica di quello che della matematica alla logica.

([22]) Schröder (Zeitschrift für Math. u. Physik, Schlömilch, hist. lit. Abth. XXV, 1880, p. 80): « Als eine Propedeutik des Logikcalculs kann man den Calcu der Identität von Gebiet einer Mannigfaltigkeit hinstellen. Dieser ist eine reine mathematische Disciplin, deren Sätzen vollkommene Evidenz und Correctheit rückhaltslos zu erkennen ist. Von ihm führt dann ein blosser Wechsel in der Interpretation oder Deutung der Symbole zu dem derzeitigen, in Hinsicht der Technik ganz mit ihm zusammenfallenden Logikcalcul über. - Es sei eine Mannigfaltigkeit von Elementen gegeben - z. B. die der Punkte einer beliebig begrenzten oder auch unbegrenzten Ebene. Buchstaben wie a, b, c . . . sollen beliebige Gebiete bedeuten, welche ganz dieser Mannigfaltigkeit gehören, also - für unser Beispiel - gemeinhin zu reden, irgendwelche Theile von Fläche. Diese Gebiete sollen nur dann einender gleich gesetzt werden, wenn sie identisch sind... ».

([23]) Grassmann (*Begriffslehre* p. 7) « Stift oder Element heisst eine Grösse, welche ursprünglich gesetzt wird, und welche nicht durch Knüpfung anderer Grössen entstanden ist - invece si dimostrerà al numero IV, che esso si può sempre ottenere con un certo numero d'operazioni da n quantità non elementari. - » Die ursprünglichen Stifte des Weltalls sind die vom Gotte gesetzsen Körperwesen,

Aetherwesen und Geisterwesen, aus deren Zusammensetzung das ganze Weltall besteht (!?).

([24]) P. e. lo dice una volta insuscettibile di relazioni metriche (Zeitschrift Schlömilch hist. lit. Abth. XXV p. 84: « *es soll von Maasbeziehungen gänzlich abgesehen werden*) », mentre un'altra (Math. Ann. XII p. 487) osserva che « *es auch metrische Relationen giebt, welche mit den logischen gewisse Analogien nothwendig darbieten* ».

([25]) Questa definizione potrà sembrare al primo momento troppo ampia, ma — per evitare qui disquisizioni metafisiche — sarà giustificata da quel che segue.

([26]) Noi facciamo astrazione dell'origine psicologica delle relazioni scambievoli che possono aver luogo di fatto fra questi oggetti del pensare, e diciamo soltanto che due cotali quantità sono confrontabili tra loro – sia che questo confronto avvenga realmente nella successione temporale o nella coesistenza spaziale oppure no.

([27]) In molti trattati la eseguibilità delle operazioni non viene dimostrata ma premessa. Dando questa dimostrazione si restringe il numero delle presupposizioni.

([28]) Gli n sono naturalmente numeri interi e positivi (numero dei fattori). Le altre lettere rappresentano quantità logiche.

([29]) Cioè minore di una comunque piccola quantità della forma $\prod_{i=1}^{m} a_i$; poichè fu dichiarato il segno della diseguaglianza soltanto per queste (che stanno fra loro nella I relazione).

([30]) A questo risultato non si arriva coi metodi di prima. Poichè, dato un elemento x, che è contenuto nelle classi $a_1, a_2 \ldots a_n$, il suo sviluppo, secondo un teorema noto, é:

$$x = f(\mathbf{1}, \mathbf{1} \ldots \mathbf{1}) \prod_{i=1}^{n} a_i + f(\mathbf{0}, \mathbf{1} \ldots \mathbf{1}) a_1' \prod_{i=2}^{n} a_i + \ldots + f(\mathbf{0}, \mathbf{0} \ldots \mathbf{0}) \prod_{i=1}^{n} a_i'$$

dove gli a'_k sono le negazioni di a_k. Ma poichè x è un elemento, e possiede le note $a_2 . a_2 \ldots a_n$, non può possedere alcuna delle loro negazioni, e perciò cadono tutti i membri ad eccezione del primo, e rimane

$$x = f(\mathbf{1}, \mathbf{1} \ldots \mathbf{1}) \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Resta ancora a determinarsi il valore della costante $f(\mathbf{1}, \mathbf{1} \ldots \mathbf{1})$, indipendente da $a_1, a_2 \ldots a_n$.

Ed ora si dimostrò che, per certi n sufficientemente grandi, si può porre $= \mathbf{1}$ (vedi nota 19).

È inutile ricordare la somiglianza di questo procedimento con quello per cui viene definito il limite di una successione di numeri, nell'algebra (Cantor; *Ueber die Ausdehnung eines Satzes*... Math. Ann. v. V p. 123).

[31] G. Cantor: *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal für reine und angew. Math. Feimer, Berlin v. 84 p. 244.

[32] Il ch. prof. R. Zimmermann osserva (op. cit. nella nota 3):

« Näher hätte Kant dem Principe der mathematischen Psychologie kaum kommen können; die Anwendung der Mathematik auf Naturwissenschaft, welche er als die « zweite » bezeichnet und *mathesis intensorum* nennt, und welche darin besteht, dass « das Reale » aller Erscheinung der Natur, die Empfindung, die kein *extensum* sondern ein *intensum* ist, Grade habe und folglich unter dem Begriff der Grösse falle, hat ihr vollkommenes Analogon in der Anwendung der Mathematik auf Psychologie, welche darin besteht dass jeder Bewusstsein's Inhalt (Vorstellung, Gefühl, Streben), der als solcher gleichfalls kein *extensum* sondern ein *Intensum* ist, Grade der Bewusstheit habe, und folglich unter dem Begriff der Grösse falle »

[33] La determinazione della grandezza delle coordinate p. e. può essere data direttamente mediante misurazioni fisiche oppure colle misure psicofisiche di Weber e Fechner.

[34] Questo segue immediatamente dall'identità

$$a_k a_k = a_k$$

e, con un conveniente aggruppamento di fattori:

$$e = \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} \left[a_i \prod_{k=1}^{i-1} (a_k) \cdot \prod_{k=i+1}^{n} (a_k) \right]$$

dove si pone

$$\prod_{k=1}^{i-1} (a_k) \cdot \prod_{k=i+1}^{n} (a_k) = \varepsilon_i .$$

[35] A questo certamente allude anche il ch. prof. Bellavitis dicendo che bisogna pur lasciare alle definizioni una latitudine alle ulteriori modificazioni (op. cit. p. 38). Non fu bene interpretato dall'Ardigò (op. cit. p. 119 nota), come m'ingegnerò di mostrare in un prossimo scritto.

[36] Che

$$\prod_{k=1}^{n} [(a_k + da_k) \varepsilon_k]$$

oppure

$$\prod_{k=1}^{n} a_k' \varepsilon_k$$

sia un elemento, segue dal teorema precedente. Si pose

$$a_k' = a_k + da_k$$

poichè gli a_k essendo *numeri*, è conosciuto il significato dei loro infinitesimi da_k.

([37]) Cioè ad ogni variazione infinitamente piccola delle coordinate, corrisponde uno spostamento (variazione) infinitamente piccolo dell'elemento.

Per l'intero spazio logico è conservato il segno **1**.

([38]) Così $a_k = 0$ rappresenta la classe dei valori nulli della proprietà ε_k; $a_k=1$ la classe dove la proprietà ε_k comparisce nel grado 1, e così via. Ambi i segni 0, 1 sono naturalmente diversi dai segni di prima **0**, **1** (che scriviamo con caratteri grassi) per la impossibilità e possibilità logica. Bisogna pure osservare che p. e. -5 è un certo concetto contrario di 5, mentre 5_1 (il contradditorio, la negazione di 5) è tutto ciò che non è 5. Quindi 5_1 accanto a -5 contiene ancora i concetti 1, 2, ... -1, -2 etc.

Sul significato di $-a$, come una proprietà negativa vedi Gauss Werke v. XI p. 176 nelle « *Aufsätze* » del 1831, e l'operetta classica di Kant: *Über die Einführung der negativen Grössen in die Weltweisheit.*

a_k ed a'_k sono sempre quantità disgiunte, dunque

$$a_k a_k' = \mathbf{0} ,$$

(a meno che non sia

$$a_k = a_h'$$

nel quale caso, com'è noto

$$(a_k^2 = a_k) ;$$

ciò che non è il caso per a_k ed a_i.

([39]) Hermann Hankel: *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen.* I. Theil: *Theorie der complexen Zahlensysteme.* Leipzig, Voss, 1867.

([40]) H. Helmholtz. *Populäre wissenschaftliche Vorträge*. Braunschweig, Vieweg 1876, 3. Heft: *Ueber die Bedeutung und die Ursprung der geometrischen Axiome.* Vortrag gehalten im Docentenverein zu Heidelberg im Jahre 1870, p. 36-37.

([41]) Considerando e come il punto d'intersezione delle rette

$$(\mathbf{0}\,,\, a_2\,,\, a_3 \ldots a_n)\,,\ (a_1\,,\, \mathbf{0}\,,\, a_3 \ldots a_n)\,, \ldots (a_1\,,\, a_2\,,\, a_3 \ldots \mathbf{0})$$

ed analogamente e', è

$$e + e' = (a_1\,,\, a_2 \ldots a_n) + (a_1'\,,\, a_2' \ldots a_n') \frac{1}{=} (a_1 + a_1'\,,\, a_2 + a_2' \ldots a_n + a_n')\,,$$

perchè l'espressione di sinistra consta di 2, quella di destra di 2^n punti d'incontro (elementi). In generale è, rispetto il numero degli elementi:

$$\sum_{\mu=1}^{m} e_\mu = \sum_{\mu=1}^{m} (a_1^{(\mu)}, a_2^{(\mu)} \ldots a_n^{(\mu)}) = \frac{1}{m^{n-1}} \left(\sum_{\mu=1}^{m} a_1^{(\mu)}\,,\, \sum_{\mu=1}^{m} a_2^{(\mu)} \ldots \sum_{\mu=1}^{m} a_n^{(\mu)} \right).$$

Mentre è sempre

$$\prod_{\mu=1}^{m} e_\mu = \prod_{\mu=1}^{m} (a_1^{(\mu)}, a_2^{(\mu)} \ldots a_n^{(\mu)}) = \left(\prod_{\mu=1}^{m} a_1^{(\mu)}, \prod_{\mu=1}^{m} a_2^{(\mu)} \ldots \prod_{\mu=1}^{m} a_n^{(\mu)}\right).$$

([42]) Per questo si può adottare la notazione

$$a = \int_{\alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2} \ldots}^{A_m, A_{m+1}, A_{m+2} \ldots} (a_1, a_2 \ldots . a_m, a_{m+1}, a_{m+2} \ldots . a_n) = \int e$$

Allora, essendo

$$e = \Pi\, a = \Pi \int e,$$

i segni Π e $\int$ rappresentano due operazioni opposte, e Π può considerarsi come una derivazione (differenziazione).

([43]) Qui bisognerebbe ancora provare che tutte le rette logiche si possono porre in questa forma, e quindi rappresentare con ε_k, ma si dovrebbe allora considerare il significato della direzione di tali linee, ed altre cose, che ci porterebbero fuori dell'argomento.

Zara, maggio 1889.

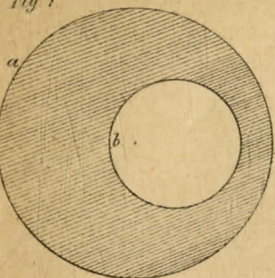



Fig. 1.

Fig. 2.

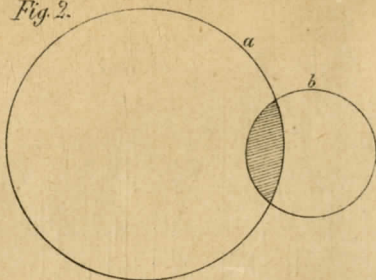



Fig. 3.

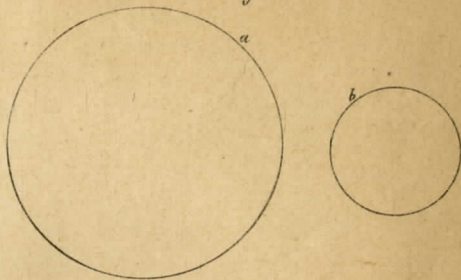



Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

F. 11

F. 12

scala della grandezza

Stab.^t Tipo-Lit.^a Italo-Germanico.